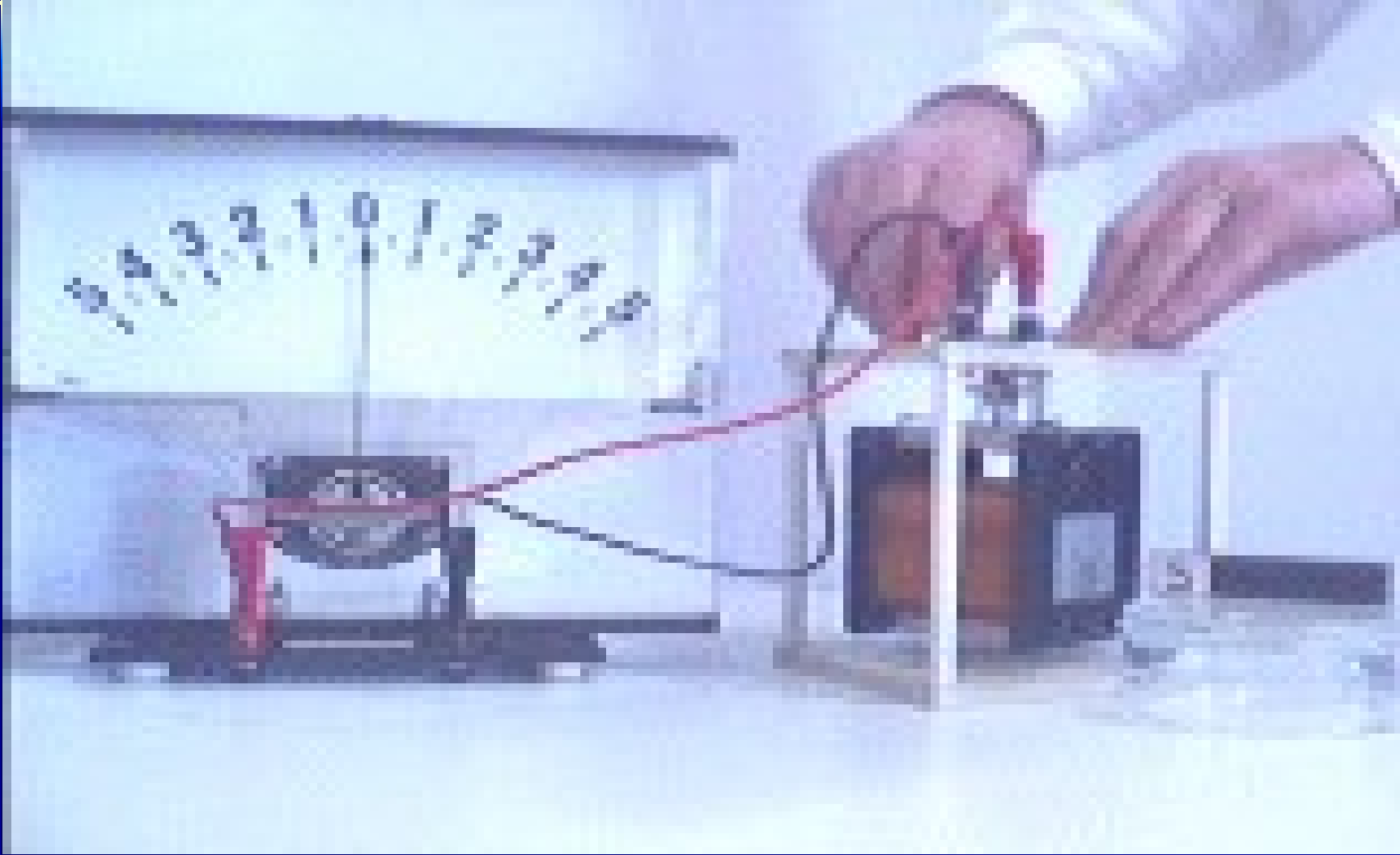


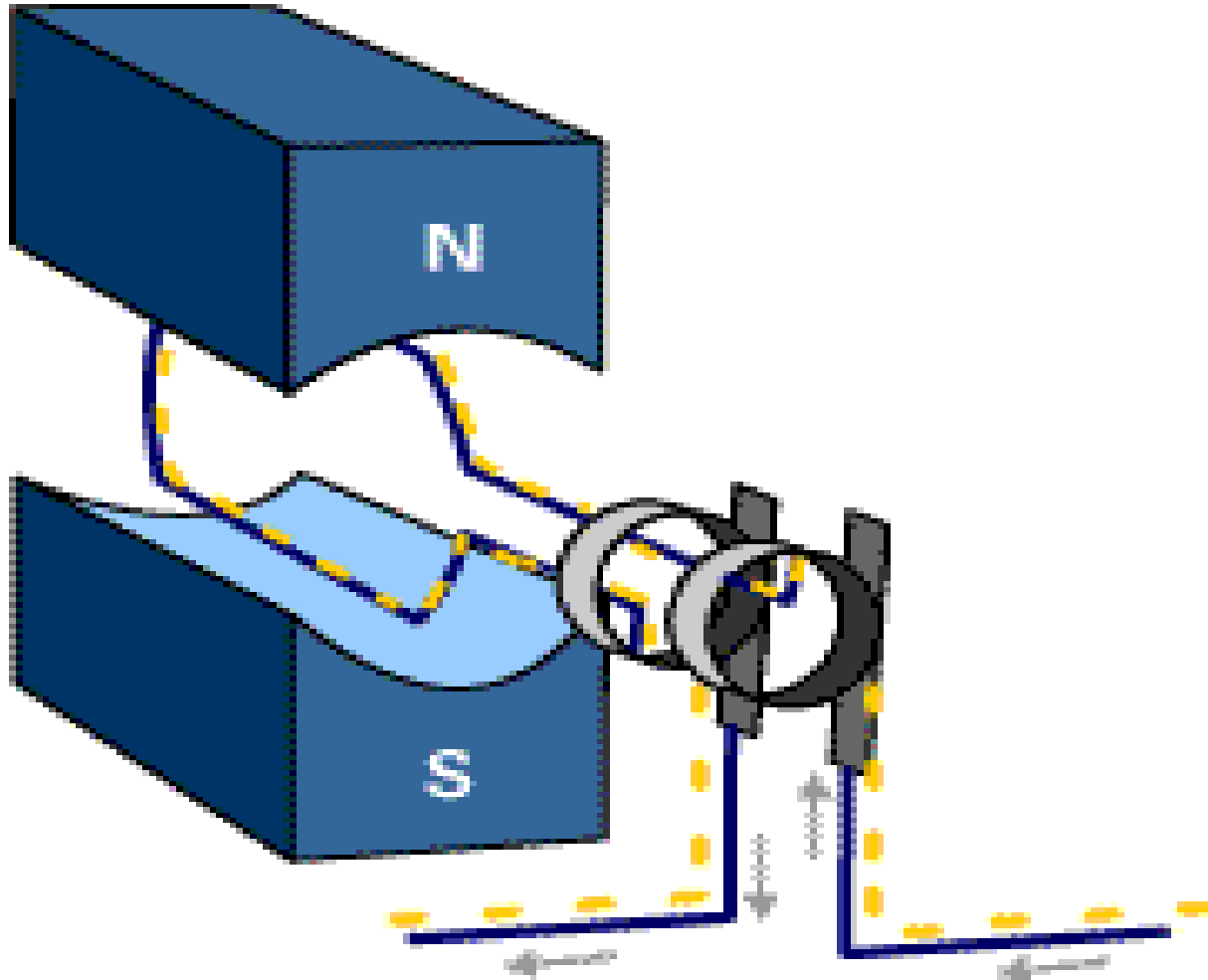
Prąd zmienny

- Generator
- Napięcie skuteczne
- Moc prądu
- Dodawanie prądów zmiennych
- Opór bierny

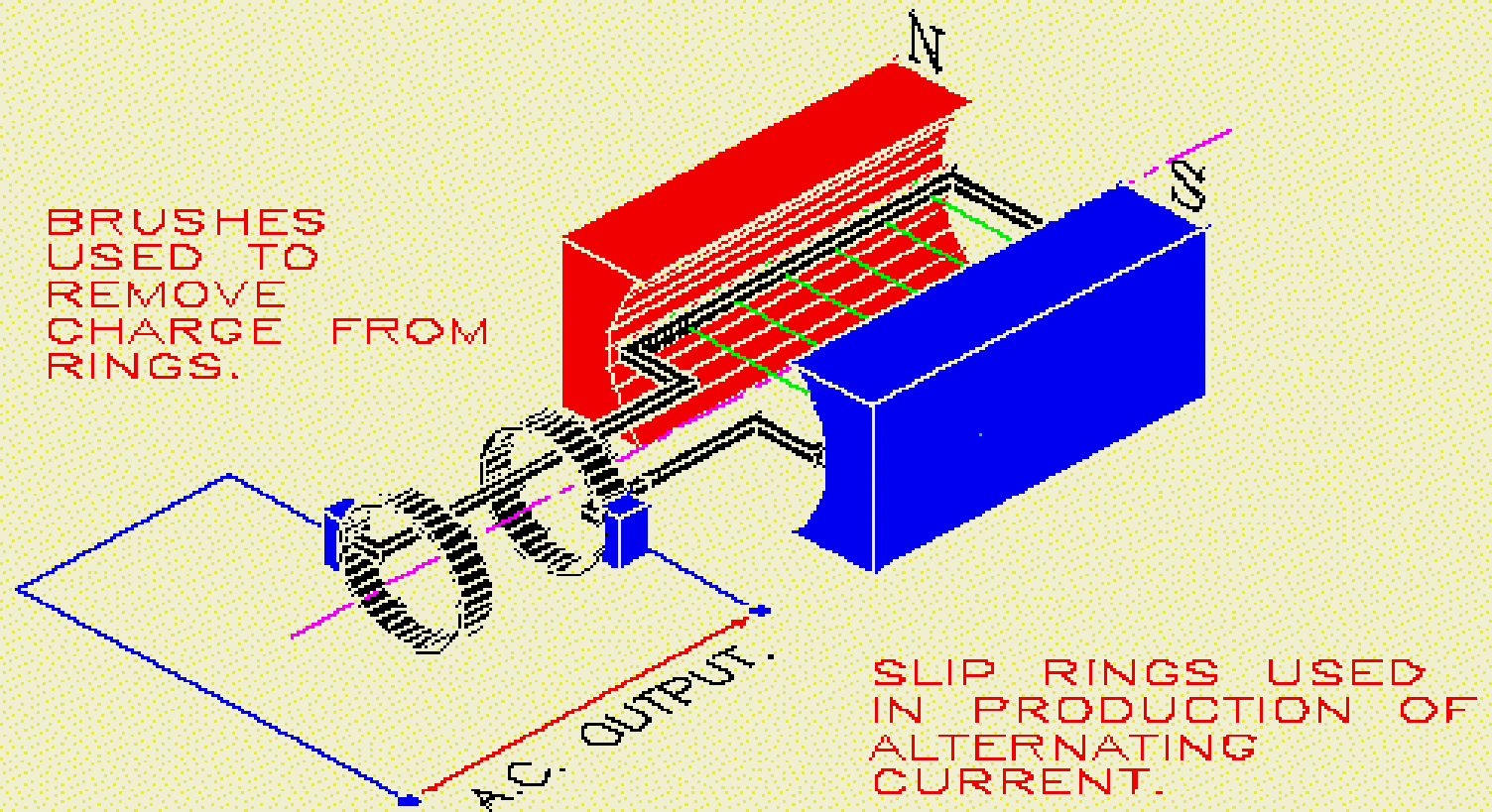
Prąd zmienny



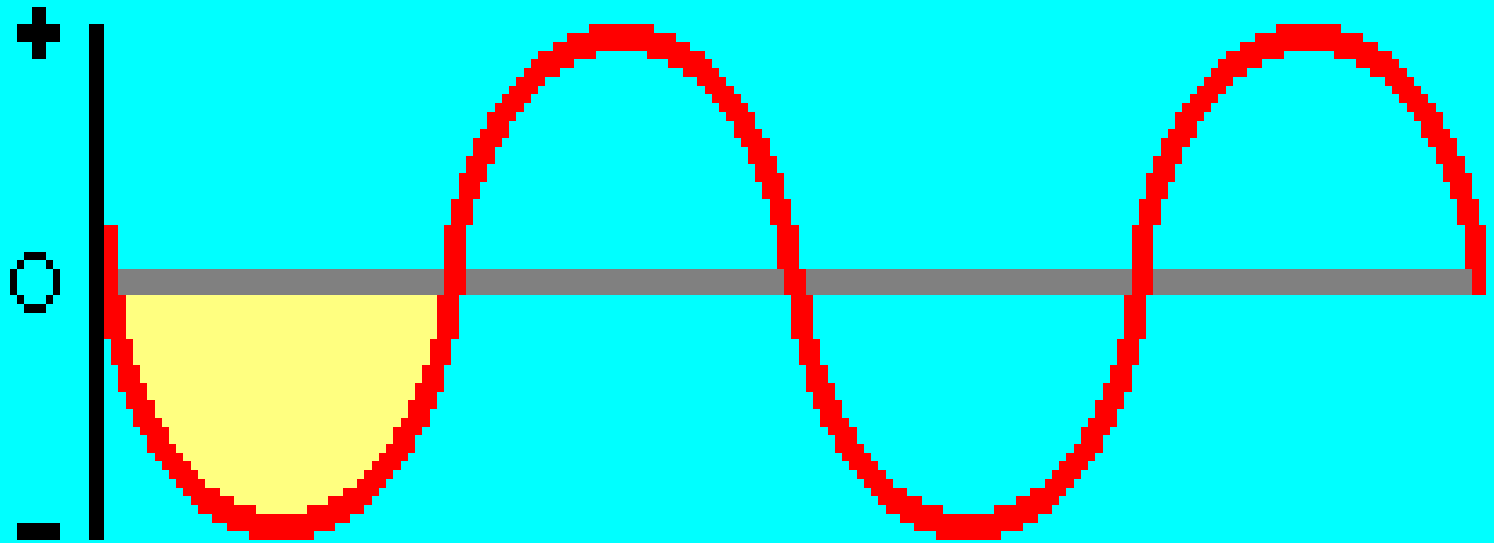
Prąd zmienny



Prąd zmienny



Prąd zmienny



Alternating Current

Prąd zmienny

Przy stałej prędkości kątowej

$$\omega = \text{const}$$

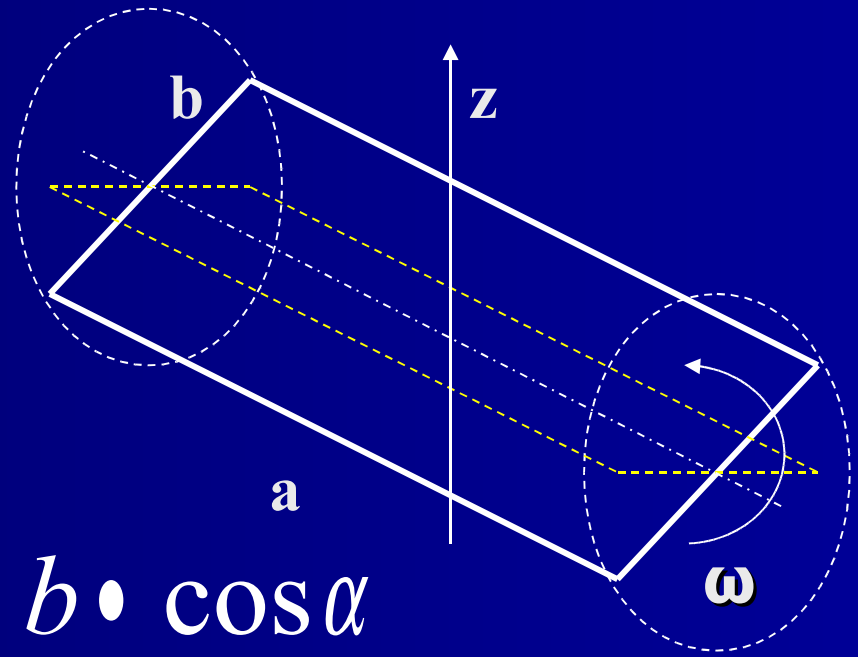
pola magnetycznego względem
ramki przewodnika w przewodniku
indukowana jest sinusoidalnie
zmienna siła elektromotoryczna ε

Prąd zmienny

$$S = a \bullet b$$

$$S_z = a \bullet b_z = a \bullet b \bullet \cos \alpha$$

$$S_z = S \bullet \cos(\omega \bullet t)$$



Prąd zmienny

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(B \bullet S)}{dt}$$

$$\varepsilon = - B \bullet \frac{dS}{dt}$$

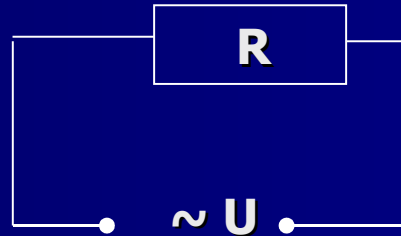
$$S = S_m \bullet \cos(\omega \bullet t)$$

$$\varepsilon = - B \bullet S_m \bullet \frac{d}{dt}(\cos(\omega \bullet t)) = B \bullet S_m \bullet \omega \bullet \sin(\omega \bullet t)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m \bullet \sin(\omega \bullet t)$$

$$U = U_m \bullet \sin(\omega \bullet t)$$

Prąd zmienny

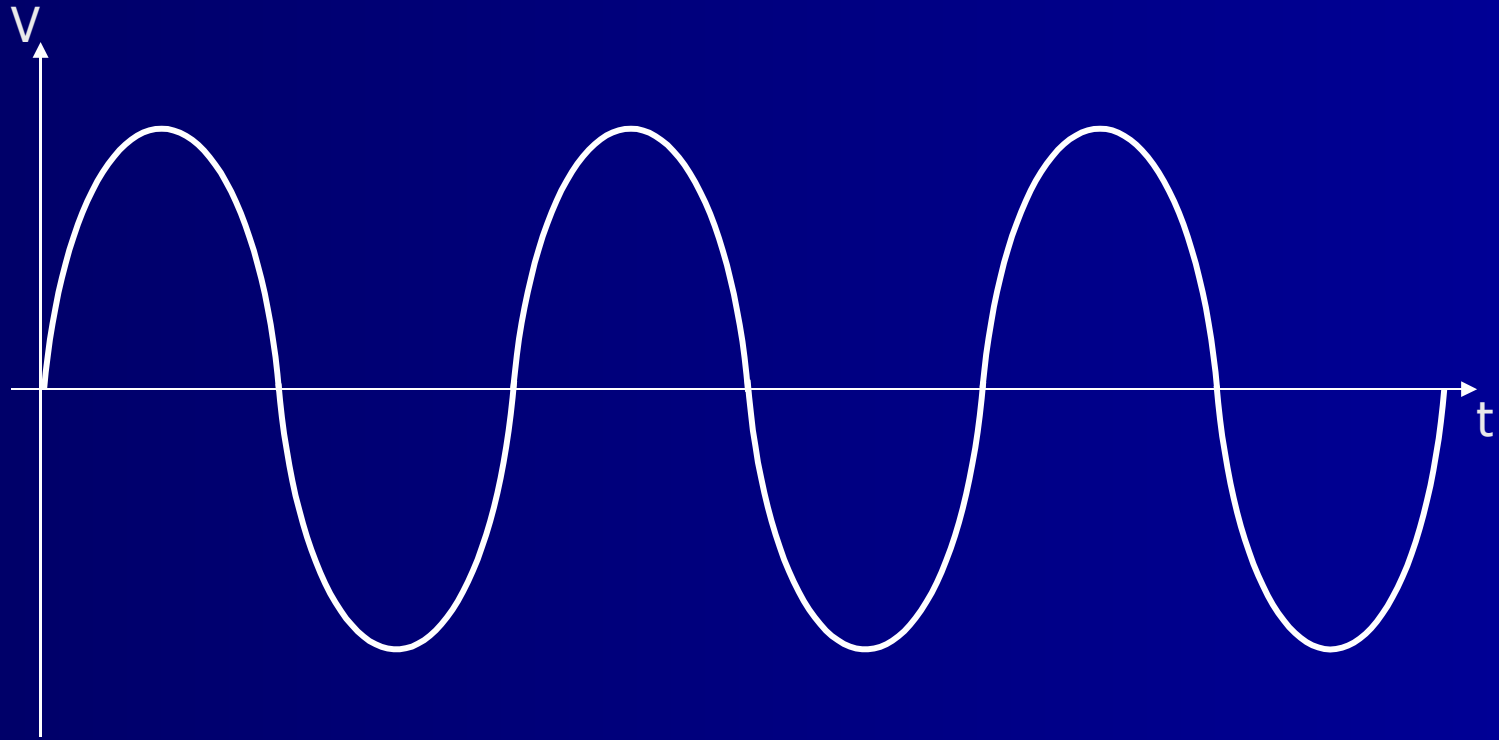


$$\varepsilon = U = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$U - i \cdot R = 0$$

$$i = \frac{U_m}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

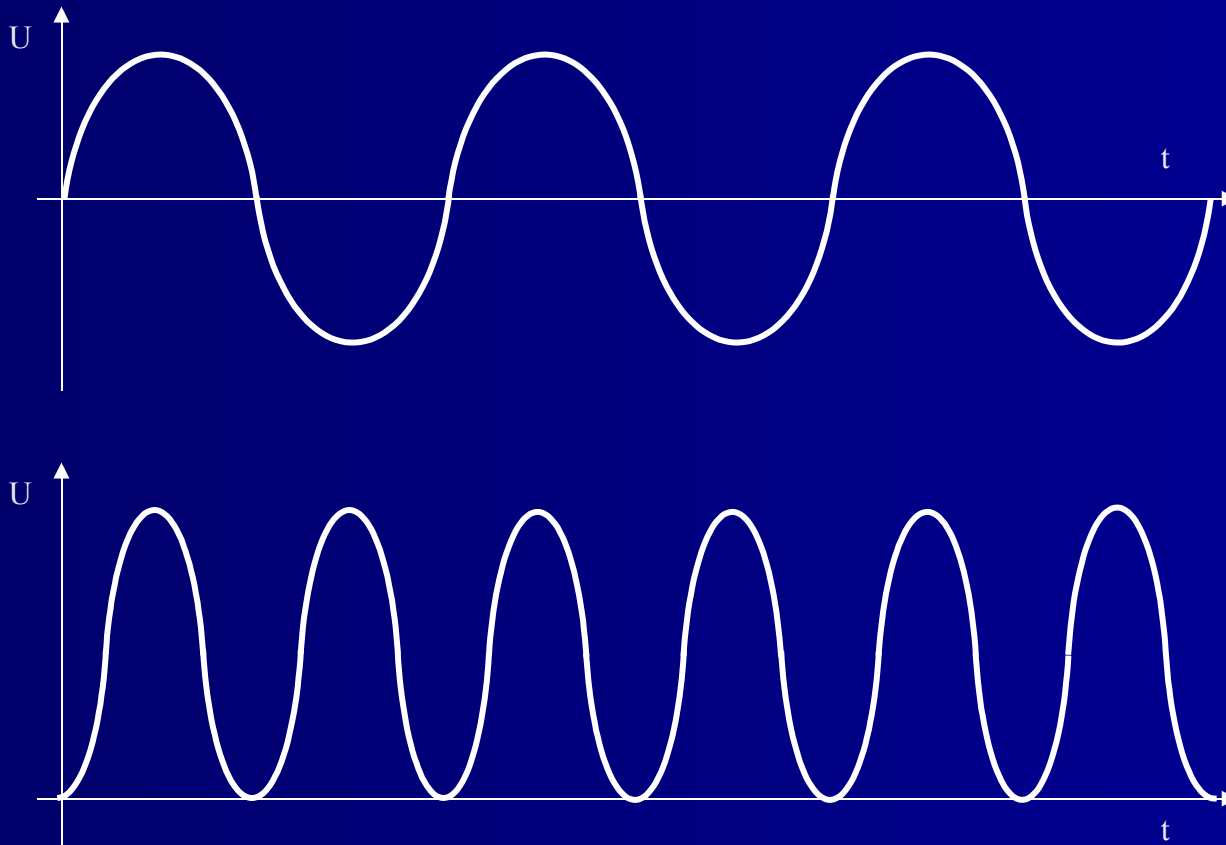
Prąd zmienny



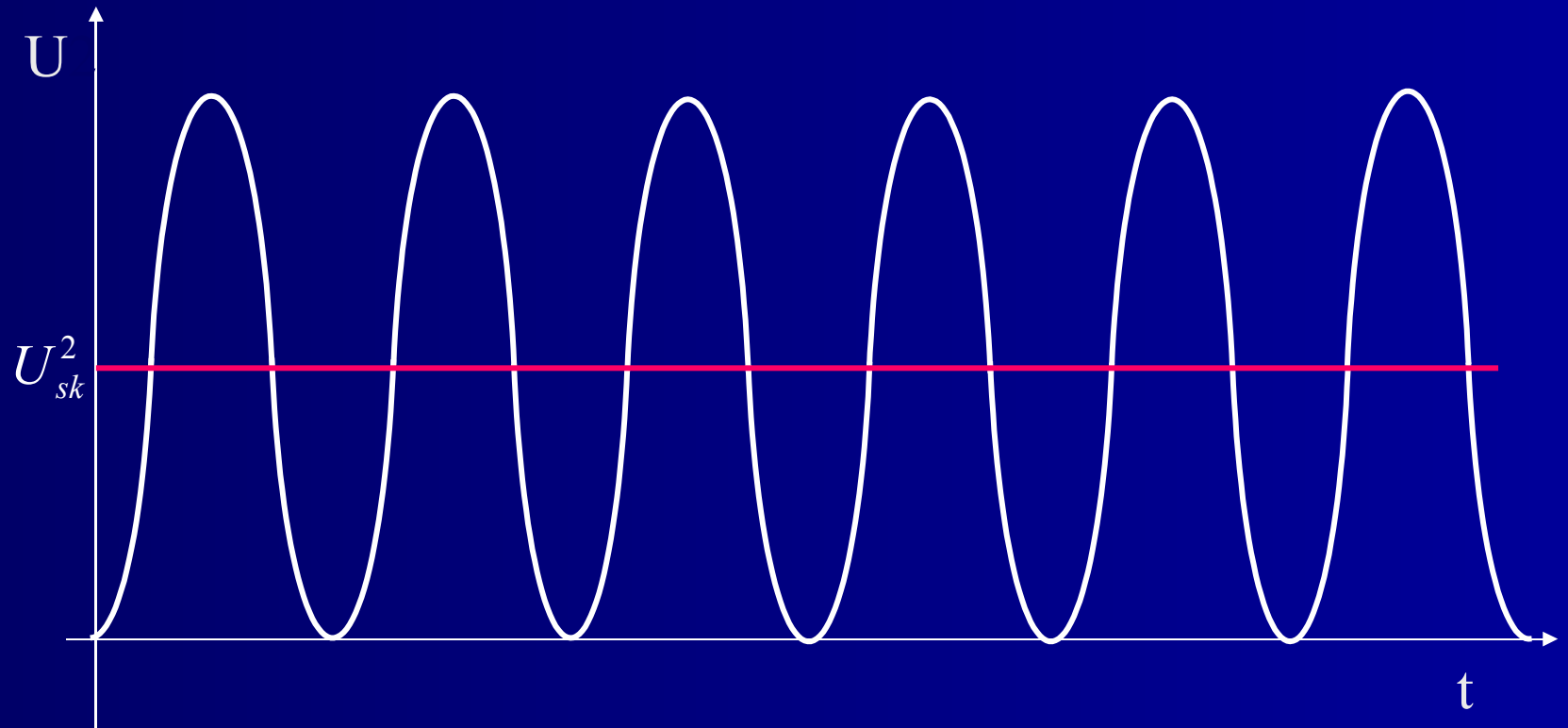
Prąd zmienny

Wartość skuteczna prądu sinusoidalnie zmiennego jest to wartość prądu stałego, który przepływając przez opór R wydziela tą samą ilość ciepła, co prąd sinusoidalnie zmienny

Prąd zmienny



Prąd zmienny



Prąd zmienny

$$Q_{(prad\ staly)} = i_{sk}^2 \cdot R \cdot T$$

$$Q_{(prad\ zmienny)} = \int_0^T R \cdot i_m^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) dt$$

$$i_{sk}^2 \cdot R \cdot T = R \cdot i_m^2 \cdot \int_0^T \sin^2(\omega \cdot t) dt$$

Prąd zmienny

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2 \cdot \alpha)}{2}$$

$$\int_0^T \sin^2(\omega \cdot t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^T dt - \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \cos(2 \cdot \omega \cdot t) dt$$

$$\int_0^T \cos(2 \cdot \omega \cdot t) dt = \left| \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \right|_0^T =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot \left[\sin\left(2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot T\right) - \sin 0 \right] = 0$$

Prąd zmienny

$$i_{sk}^2 \cdot R \cdot T = i_m^2 \cdot R \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^T dt$$

$$i_{sk}^2 \cdot T = \frac{1}{2} \cdot i_m^2 \cdot T$$

$$i_{sk} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}$$

Prąd zmienny

$$\frac{U_{sk}^2}{R} \cdot T = \frac{U_m^2}{R} \cdot \int_0^T \sin^2(\omega \cdot t) dt$$

$$U_{sk} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Prąd zmienny

Moc prądu stałego jest iloczynem napięcia i natężenia prądu

$$P = U \cdot i$$

Prąd zmienny

Iloczyn napięcia i natężenia prądu zmiennego określa jego moc chwilową

Moc średnia jest moc odniesiona do jednego okresu prądu zmiennego

Dla prądu zmiennego przebieg zmian napięcia i natężenia może być różny w fazie

$$U = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$i = i_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Prąd zmienny

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [U_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot i_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)] dt$$

$$P = \frac{U_m \cdot i_m}{T} \cdot \int_0^T [\sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)] dt$$

Prąd zmienny

$$\sin(\omega \bullet t + \varphi) = \sin(\omega \bullet t) \bullet \cos \varphi + \sin \varphi \bullet \cos(\omega \bullet t)$$

$$\sin(\omega \bullet t) \bullet \sin(\omega \bullet t + \varphi) = \sin^2(\omega \bullet t) \bullet \cos \varphi + \sin(\omega \bullet t) \bullet \cos(\omega \bullet t) \bullet \sin \varphi$$

Prąd zmienny

$$P = \frac{U_m \cdot i_m}{T} \cdot \int_0^T [\sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)] dt$$

$$\sin(\omega \cdot t + \varphi) = \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$P = \frac{U_m \cdot i_m}{T} \cdot \left[\int_0^T \cos \varphi \cdot \sin^2(\omega \cdot t) dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \sin \varphi \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt \right]$$

Prąd zmienny

$$\left[\sin^2(\omega \cdot t) \right]' = 2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\int \left[\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + C$$

Prąd zmienny

$$\int_0^T \cos \varphi \cdot \sin^2(\omega \cdot t) dt = \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} \cdot T$$

$$\int_0^T \sin \varphi \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt =$$

$$= \sin \varphi \cdot \left| \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \right|_0^T =$$

$$= \frac{\sin \varphi}{2 \cdot \omega} \cdot \left[\sin^2 \left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot T \right) - \sin^2 0 \right] = 0$$

Prąd zmienny

$$P = \frac{U_m \cdot i_m}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot T \cdot \cos \varphi$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot U_m \cdot i_m \cdot \cos \varphi$$

$$P = U_{sk} \cdot i_{sk} \cdot \cos \varphi$$

Prąd zmienny

- Moc średnia jest nazywana mocą czynną i jest to moc, jaka wydzielą się na odbiorniku
- Wartość mocy czynnej jest obniżana przez przesunięcie w fazie napięcia i natężenia prądu ($\cos\varphi$)
- Moc, która nie wydzielą się na odbiorniku nazywana jest mocą bierną Q

Prąd zmienny

$$Q = U_{sk} \cdot i_{sk} \cdot \sin \varphi$$

Moc bierna ma wartość dodatnią –
napięcie wyprzedza w fazie natężenie
prądu

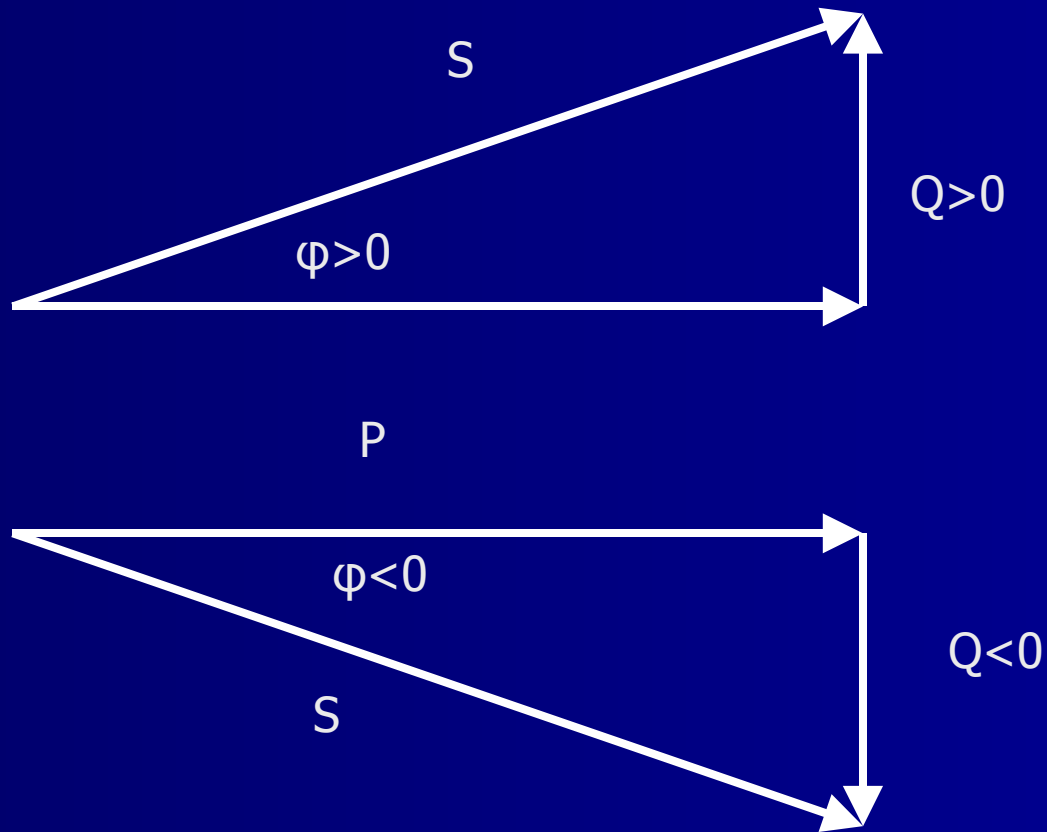
Moc bierna ma wartość ujemną –
natężenie wyprzedza w fazie napięcie
prądu

Prąd zmienny

Moc czynna i bierna mogą być przedstawione w postaci wektorowej
Suma mocy czynnej i biernej nazywana jest mocą pozorną S

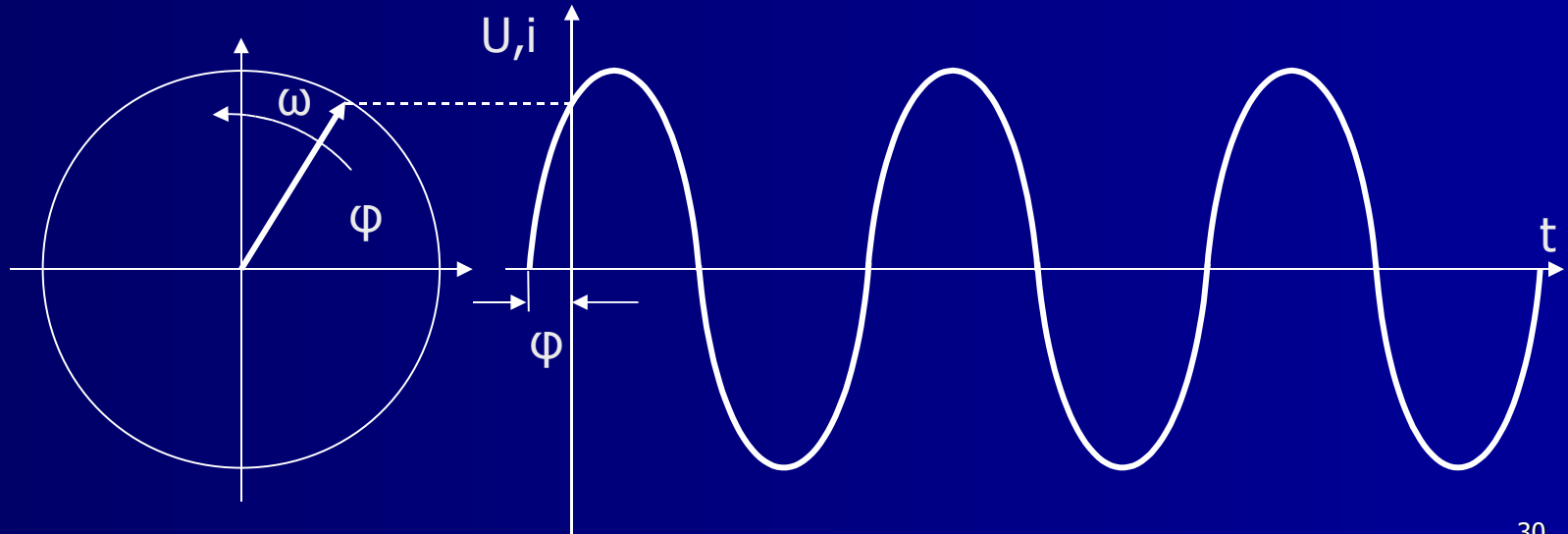
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Prąd zmienny



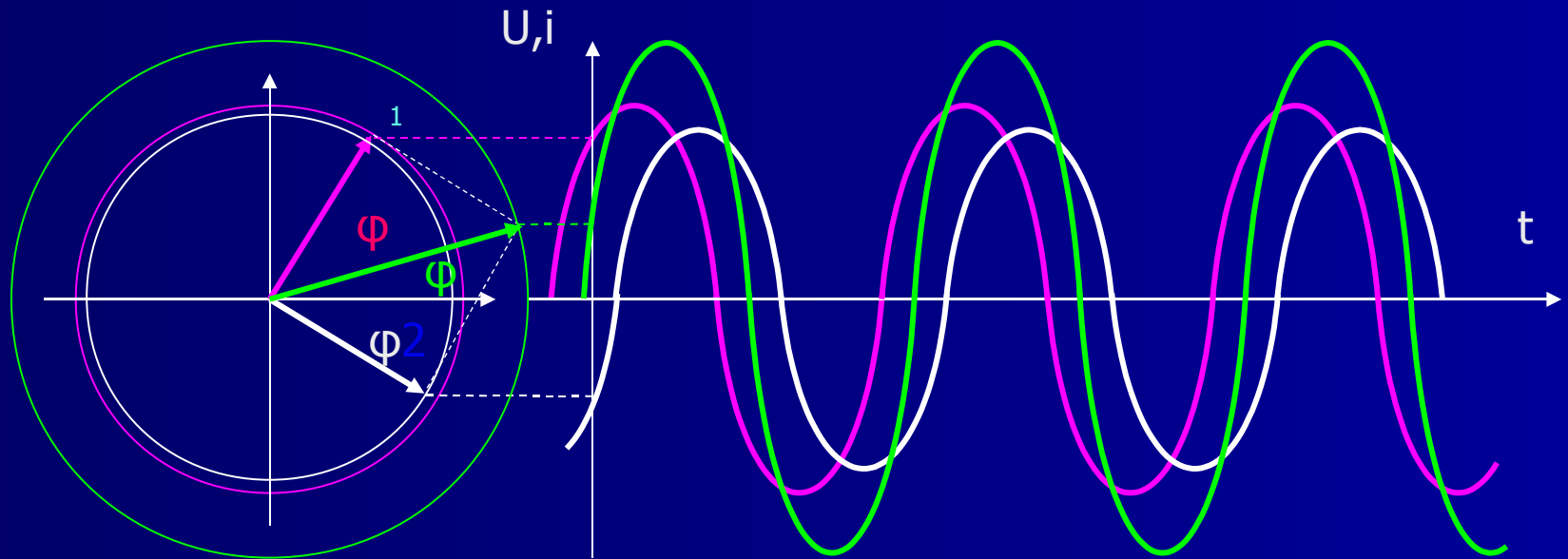
Prąd zmienny

Przesunięcie fazowe może być przedstawione przy pomocy wirującego wektora

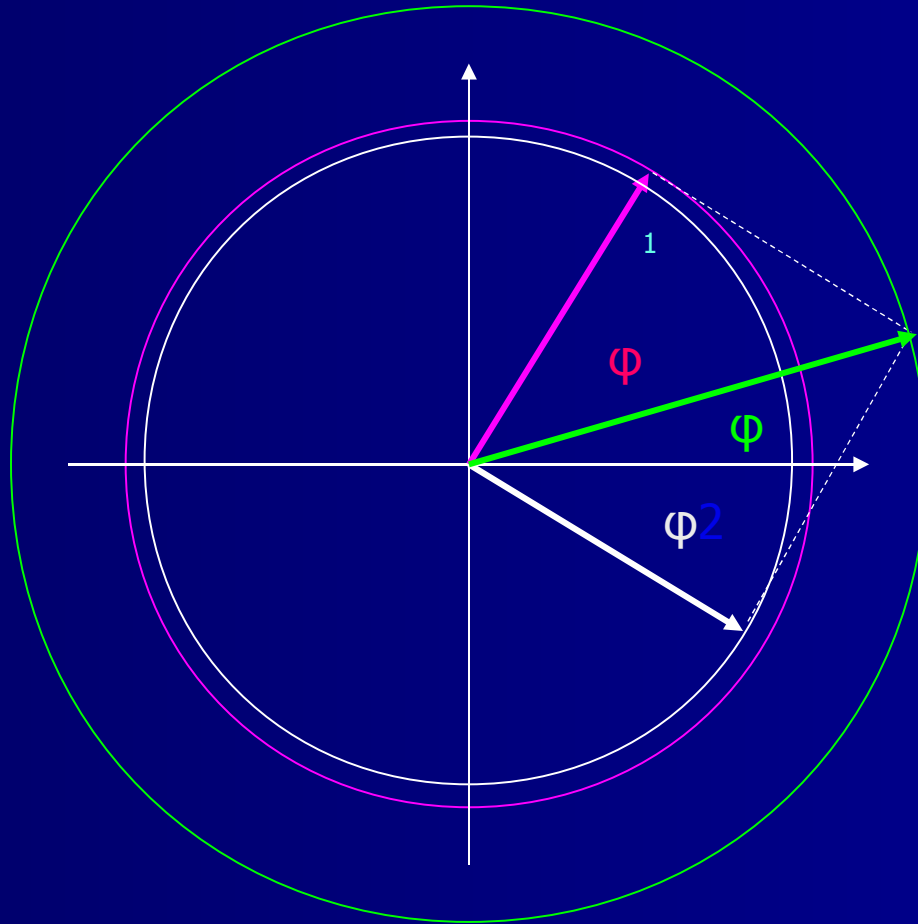


Prąd zmienny

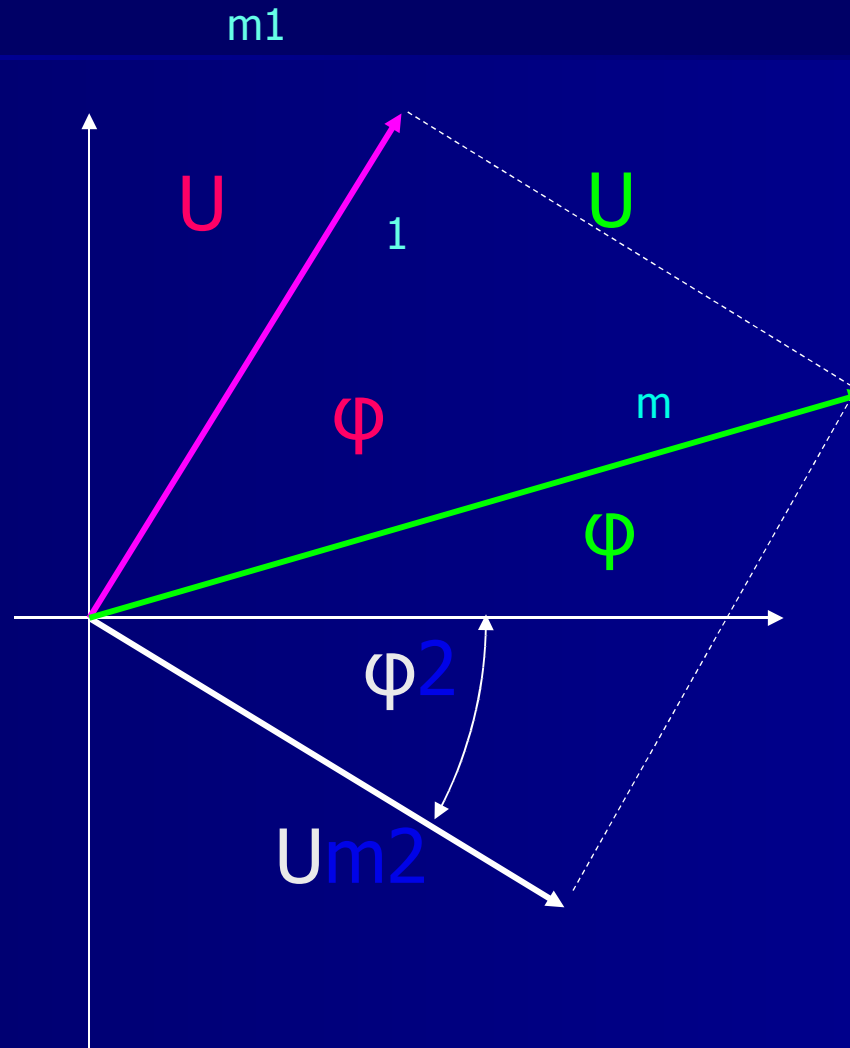
Dodawanie prądów sinusoidalnie zmiennych
($\omega = \text{const}$)



Prąd zmienny



Prąd zmienny



Prąd zmienny

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$U_m^2 = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2 \cdot U_{m1} \cdot U_{m2} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$U_m = \sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2 \cdot U_{m1} \cdot U_{m2} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Prąd zmienny

$$U = U_1 + U_2$$

$$U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = U_{m1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) + \\ + U_{m2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

Prąd zmienny

$$\begin{aligned} U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) &= \\ &= U_m \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi + \\ &+ \sin \varphi \cdot \cos(\omega \cdot t)] \end{aligned}$$

Prąd zmienny

$$\begin{aligned} & U_{m1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) + U_{m2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) = \\ & = U_{m1} \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)] + \\ & + U_{m2} \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)] \end{aligned}$$

Prąd zmienny

$$\begin{aligned} U_m \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos(\omega \cdot t)] = \\ = U_{m1} \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)] + \\ + U_{m2} \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)] \end{aligned}$$

Prąd zmienny

$$U_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi = U_{m1} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi_1 + \\ + U_{m2} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi_2$$

$$U_m \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi = U_{m1} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi_1 + \\ + U_{m2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi_2$$

Prąd zmienny

$$U_m \cdot \cos \varphi = U_{m1} \cdot \cos \varphi_1 + U_{m2} \cdot \cos \varphi_2$$

$$U_m \cdot \sin \varphi = U_{m1} \cdot \sin \varphi_1 + U_{m2} \cdot \sin \varphi_2$$

$$U_m^2 \cdot \cos^2 \varphi = (U_{m1} \cdot \cos \varphi_1 + U_{m2} \cdot \cos \varphi_2)^2$$

$$U_m^2 \cdot \sin^2 \varphi = (U_{m1} \cdot \sin \varphi_1 + U_{m2} \cdot \sin \varphi_2)^2$$

Prąd zmienny

$$U_m^2 = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2 \cdot U_{m1} \cdot U_{m2} \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)$$

$$U_m^2 = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2 \cdot U_{m1} \cdot U_{m2} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$U_m = \sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2 \cdot U_{m1} \cdot U_{m2} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Prąd zmienny

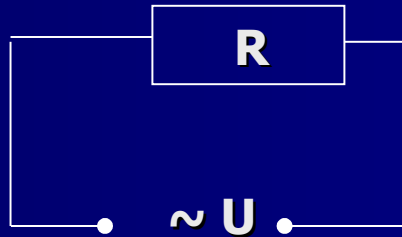
$$U_m \bullet \cos \varphi = U_{m1} \bullet \cos \varphi_1 + U_{m2} \bullet \cos \varphi_2$$

$$U_m \bullet \sin \varphi = U_{m1} \bullet \sin \varphi_1 + U_{m2} \bullet \sin \varphi_2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{m1} \bullet \sin \varphi_1 + U_{m2} \bullet \sin \varphi_2}{U_{m1} \bullet \cos \varphi_1 + U_{m2} \bullet \cos \varphi_2}$$

Prąd zmienny

Rezystor idealny



Prąd zmienny

$$u_R = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

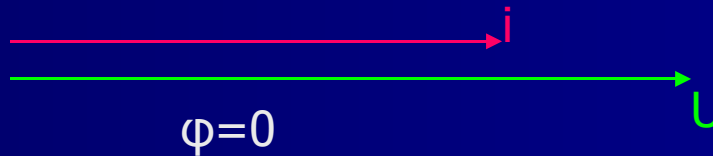
$$i_R = i_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$i_m = \frac{U_m}{R} \quad \sqrt{2} \cdot i_{(sk)} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{(sk)}}{R}$$

$$i = \frac{U}{R}$$

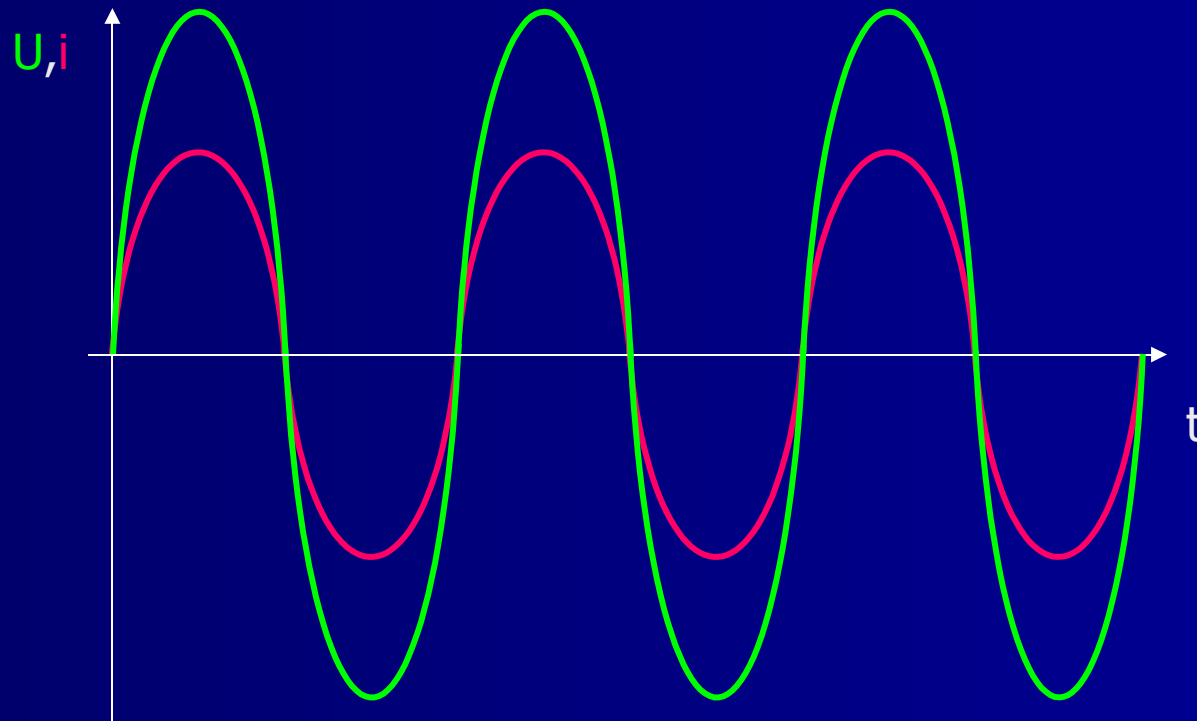
Prąd zmienny

Rezystor idealny



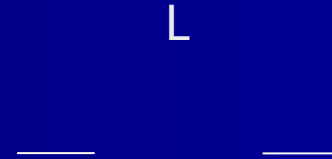
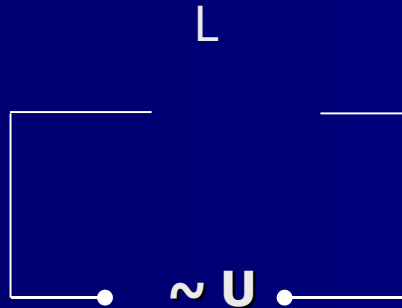
Prąd zmienny

Rezystor idealny



Prąd zmienny

Cewka idealna



Prąd zmienny

$$i_L = i_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\varepsilon_L = -L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$u_L = -\varepsilon_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$u_L = L \cdot \frac{d}{dt} [i_m \cdot \sin(\omega \cdot t)] = L \cdot \omega \cdot i_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Prąd zmienny

$$u_L = U_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad U_m = \omega \cdot L \cdot i_m$$

$$\sqrt{2} \cdot U_{(sk)} = \omega \cdot L \cdot \sqrt{2} \cdot i_{(sk)}$$

$$\frac{U}{i} = \omega \cdot L = X_L(R_L)$$

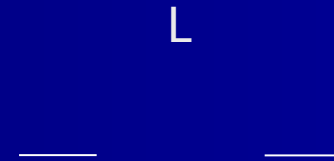
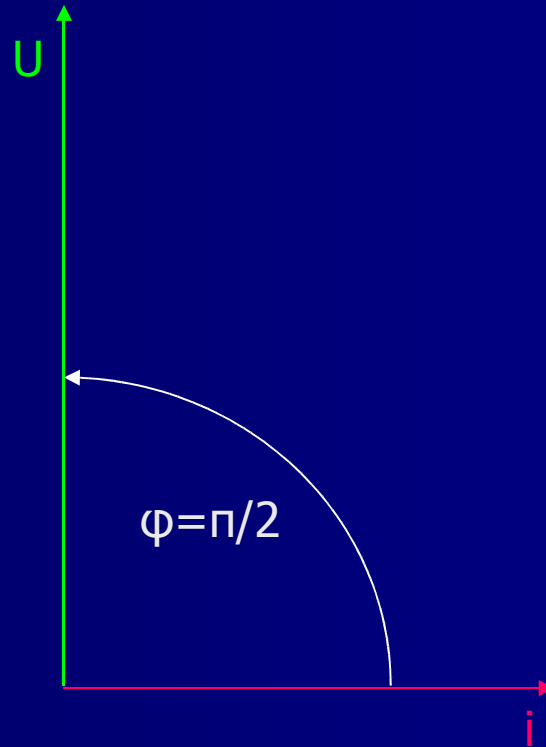
X_L , R_L – reaktancja indukcyjna, (bierny) opór indukcyjny

Prąd zmienny

W obwodzie z cewka idealna napięcie wyprzedza prąd w fazie o kąt $\varphi = \pi/2$

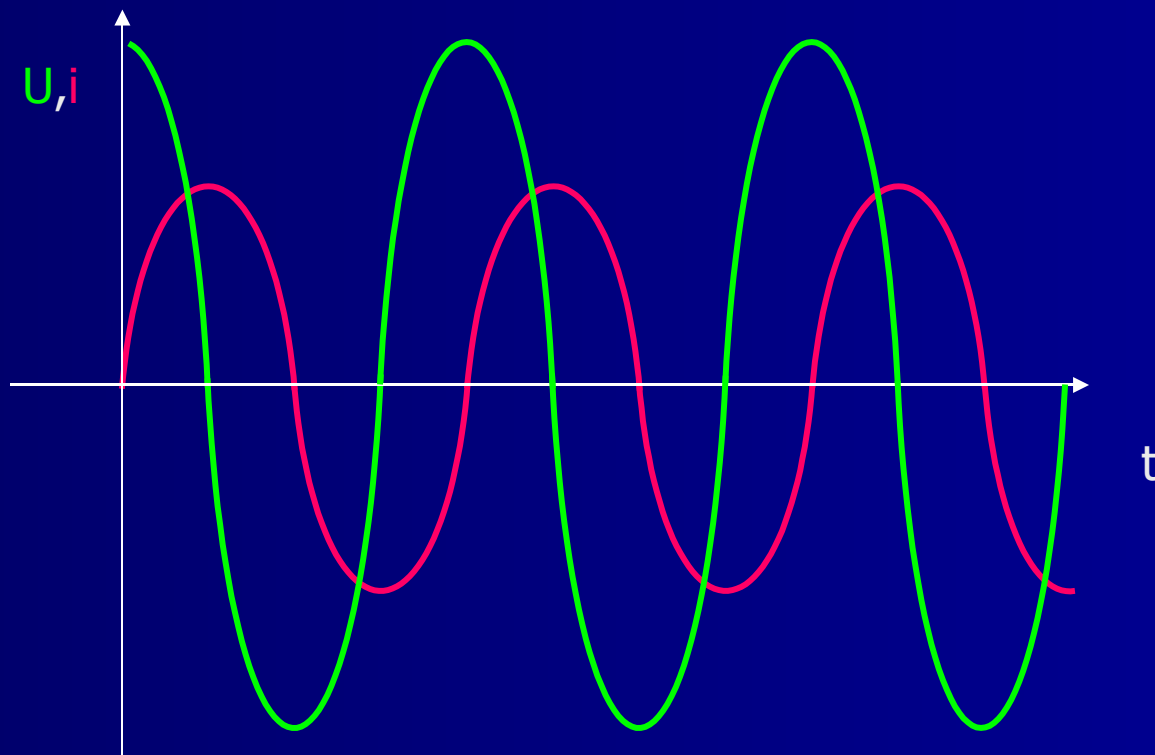
Prąd zmienny

Cewka idealna



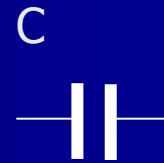
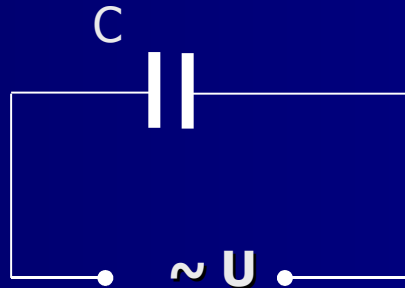
Prąd zmienny

Cewka idealna



Prąd zmienny

Kondensator idealny



Prąd zmienny

$$u_C = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$dQ = C \cdot du_C$$

$$i_C = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$i_C = C \cdot \frac{d}{dt} [U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)] = C \cdot \omega \cdot U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Prąd zmienny

$$i_C = i_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad i_m = \omega \cdot C \cdot U_m$$

$$\sqrt{2} \cdot i_{(sk)} = \omega \cdot C \cdot \sqrt{2} \cdot U_{(sk)}$$

$$\frac{U}{i} = \frac{1}{\omega \cdot C} = X_C(R_C)$$

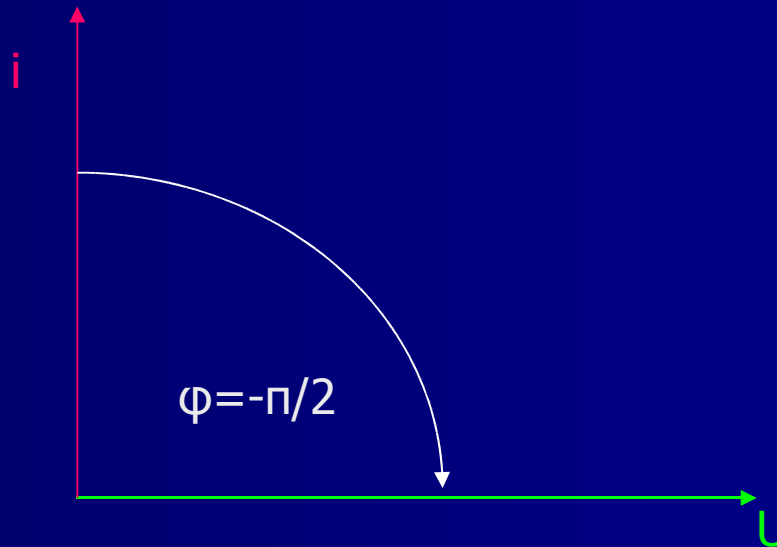
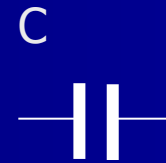
X_C , R_C – reaktancja pojemnościowa, (bierny) opór pojemnościowy

Prąd zmienny

W obwodzie z kondensatorem idealnym napięcie opóźnia się względem prądu w fazie o kąt $\varphi = \pi/2$

Prąd zmienny

Kondensator idealny



Prąd zmienny

Kondensator idealny

